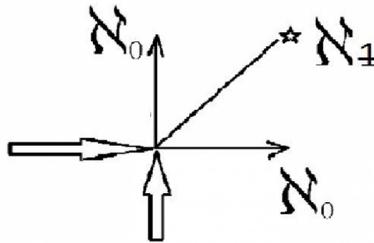


Omaggio a Umberto Cibien

(*mio amico fraterno*)
(PARTE QUARTA)



Voglio ricordarti così, come quando eravamo giovani e forti, quando le nostre menti viaggiavano alla velocità della luce su teorie delle quali solo in poche persone al mondo sono state in grado di compiere le nostre evoluzioni! Come acrobati eravamo in grado di far compiere alle nostre intelligenze dei voli sui più complicati concetti, come anime gemelle giocavamo sui campi della conoscenza! Adesso hai calcolato con estrema precisione l'integrale della gaussiana della parte concernete la tua permanenza su questo pianeta, lo hai fatto per liberarti in una geodetica esistenziale dove neanche i limiti della libertà saranno in grado di contenere il tuo spirito. Sarai sempre con me, nella mia mente e nel mio cuore. Adesso è grande il mio dolore, ma lo saprò superare! Torneremo ancora a giocare!
Ciao Umberto Cibien!



MISCELLANEA MATEMATICA

Qui troverete una miscellanea di articoli dedicati vari argomenti di matematica a corredo delle precedenti argomentazioni trattate da Umberto riportati anche a questo indirizzo:

<http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/category/articoli/matematica/>

Qui troverete degli articoli di matematica pura trattati in modo approfondito ma decisamente poco formale.

Si spazierà dai paradossi più importanti degli insiemi, fino alle congetture “moderne”, tipo la congettura di Poincarè.

Lo scopo finale del tutto, (*scriveva Umberto*), sarà rendere un po' più simpatica quella materia che la maggior parte di noi ha odiato sui banchi di scuola, presentata come un ammasso di tecniche di calcolo informi e incomprensibili, che non ha niente a che fare con la matematica di Cantor, Riemann, Gauss, Poincarè, Hilbert e scusate se non posso citarli tutti.

La matematica è creatività, intuizione, e non una rigida disciplina fortemente formalizzata sui libri di scuola, somigliante per lo più a un codice legislativo.

Ndr: spero che questa raccolta di articoli redatti da Umberto, riesca a far capire che la matematica può essere considerata un linguaggio con cui si possono scrivere anche armonie mentali di inferenze che giocano con i concetti che sappiamo elaborare per interpretare la nostra relazione con la natura delle cose.

Il numero di Nepero è irrazionale.

Eulero e Nepero si sono Entrambi occupati del numero e .

In realtà, sembra che sia stato Giacomo Bernoulli, il primo a considerare il numero e come limite della successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Ciononostante, il numero è noto più che altro come numero di Nepero.

Per capire la soluzione, quindi diventa necessario capire se il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ esista e abbia un valore finito.}$$

Facciamolo in due passi.

Primo passo: dimostriamo per prima cosa che la successione:

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente.

$$(a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots)$$

osserviamo che ogni termine è positivo.

Ricordiamo che una successione altro non è che una funzione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali, e come codominio (di solito) \mathbf{R} , insieme dei numeri reali.

$$\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}, n \rightarrow a_n.$$

Per prendere un po' di confidenza, calcoliamo i primi termini della successione:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

già da qui vediamo che la funzione è crescente.

Dimostriamolo però per ogni valore di n , usando il binomio di Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} a^{n-k} \cdot b^k.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot 1^{n-k}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

il prodotto $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ ha k fattori, per cui a denominatore possiamo esplicitare n^k ottenendo k frazioni.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

vogliamo confrontare a_n con a_{n+1} ; per a_{n+1} avremo dei conti analoghi (basta sostituire a $n \rightarrow n+1$):

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

Fissiamo ora un valore di k .

Osserviamo che il primo termine $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ che compare nella sommatoria di a_n è minore del primo termine che compare nella sommatoria di a_{n+1} :

$(1 - \frac{1}{n+1})$; questo succede per ogni fattore nei prodotti generati con un certo k , dal primo all'ultimo: $(1 - \frac{k-1}{n}) < (1 - \frac{k-1}{n+1})$.

Quindi ogni addendo della sommatoria che dà a_n è minore del corrispondente che dà a_{n+1} .

Inoltre, per $k=n+1$ nella seconda sommatoria abbiamo un termine in più. Quindi senz'altro $a_n < a_{n+1}$.

Per vederlo meglio:

$$a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n+1}) + T(n+1)$$

(ci siamo fermati nella sommatoria a $k=n$; il termine $T(n+1)$ è il termine che si ottiene per $k=n+1$, ed è un termine positivo.

Possiamo adesso confrontare le due somme, che hanno, fissato k , solo come differenza il fatto che in un prodotto compare n , nell'altro $n+1$:

per a_n :

$$\frac{1}{k!} \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})$$

per a_{n+1} :

$$\frac{1}{k!} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n+1})$$

quindi, per ogni k , essendo $n < n+1$

$$\frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

e quindi anche per le due sommatorie:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

il primo membro è a_n , il secondo è $a_{n+1} - T(n+1)$, con

$$T(n+1) > 0$$

Siamo quindi sicuri che $a_n < a_{n+1}$

La successione è dunque strettamente crescente.

Secondo passo: la successione degli a_n è compresa fra 2 e 3:

$2 < a_n < 3$ per ogni $n > 1$.

se $n=1$, $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$; essendo strettamente crescente,

$2 < a_n$ qualsiasi sia n .

Riprendiamo adesso in mano l'espressione:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

essendo ciascuno dei fattori del tipo $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \dots, \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$ minori di 1, si avrà:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Notiamo poi che $k! = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{k-1}$ **d)**

$$a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

dove abbiamo usato la diseuguaglianza **d)** nel terzo passaggio ,mentre nell'ultima sommatoria, se si cambia l'indice da **k -1** a **k** gli estremi vanno cambiati con **0** e **n-1**.

Ciò ci permette di capire che l'ultima sommatoria è una somma **geometrica**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$$

quindi

$$a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} < 1 + 2 = 3$$

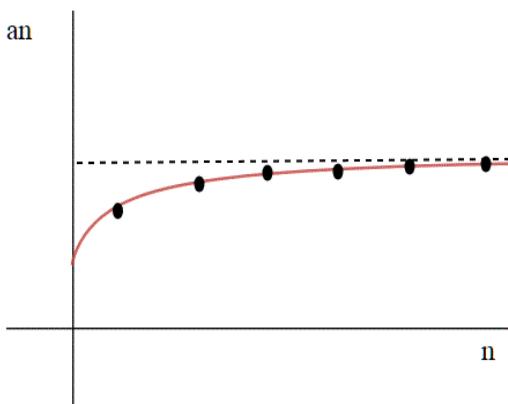
pertanto $2 < a_n < 3$.

Questo ci basta per concludere che la successione, essendo crescente e limitata, ammette un limite*, che chiamiamo proprio e.

Dunque $2 < e \leq 3$.

- In realtà dovremmo citare un noto teorema sulle successioni crescenti e limitate , che afferma proprio quanto detto.

Non avendo parlato mai a fondo di successioni, ci limitiamo ad intuire che essendo crescente e limitata superiormente, alla fine dovrà convergere ad un numero limitato. Inoltre questo limite potrebbe anche essere uguale a 3, ma vedremo che è impossibile.



Una funzione crescente e superiormente limitata, tende ad un valore finito.

Nel nostro caso la funzione non assume tutti i valori, ma solo quelli relativi ai pallini, essendo appunto una successione. Chiaramente il risultato finale non cambia.

La funzione esponenziale e^x

Due parole sulla funzione esponenziale; siamo talmente abituati ad usarla che forse non ci ricordiamo nemmeno come è definita.

Infatti, finchè si tratta di usare degli esponenti interi o razionali, sappiamo tutti cosa significa e^n , $e^{\frac{m}{n}}$.

Ma quando l'esponente è un numero reale x ? Abbiamo visto come la definì Newton.

Come una serie di potenze di cui si ricavò i coefficienti imponendo che la funzione fosse uguale alla sua derivata.

Il risultato finale fu questo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \text{ Per quanto appena detto sappiamo poi che } De^x = e^x.$$

Irrazionalità di e

Il numero di Nepero e , definito come limite della successione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ è un numero irrazionale.}$$

Supponiamo per assurdo che e sia un numero razionale.

$$\text{Allora } e = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \text{ numeri interi.}$$

Sfruttiamo adesso la **formula di Taylor**, che potete trovare [qui](http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2015/11/05/38-costruzione-rigorosa-della-formula-di-taylor-seconda-parte/):

<http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2015/11/05/38-costruzione-rigorosa-della-formula-di-taylor-seconda-parte/>

In particolare, siamo interessati allo sviluppo di Maclaurin con il resto di Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{(x - x_0)^4}{4!} f^{IV}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}$$

Dove:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Applichiamolo alla funzione e^x (che ha tutti i requisiti)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{x_n}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

dove $0 < x_n < x$

ponendo $x=1$, abbiamo:

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^{x_n}}{(n+1)!}; \quad 0 < x_n < 1$$

sostituiamo adesso ad $e = \frac{p}{q}$ e moltiplichiamo ambo i membri per $n!$:

$$n!e = n! \cdot \frac{p}{q} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + \frac{e^{x_n}}{n+1}$$

essendo $0 < x_n < 1$, ed essendo crescente la funzione esponenziale, $1 = e^0 < e^{x_n} < e < 3$, quindi $e^{x_n} < 3$;

Prendiamo adesso $n > \max(3, q)$.

I numeri $n!/q$ risulta intero.

Chiaramente anche il numero $n!/k!$ è intero e quindi anche

la sommatoria
$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}.$$

Quindi anche la differenza $n! \cdot \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$ è un intero.

Tale differenza è uguale a $\frac{e^{x_n}}{n+1}$; ma abbiamo preso $n > 3$, ed essendo

$e^{x_n} < 3$, risulta: $\frac{e^{x_n}}{n+1} < 1$.

Quindi l'identità $e = \frac{p}{q}$ è assurda, e il numero di Nepero **non può essere**

razionale.

E quindi e non può nemmeno essere uguale a 3, che è un numero razionale.

Quindi $2 < e < 3$.

Il numero di Nepero è trascendente. Parte prima

Stiamo parlando del numero e , ma purtroppo nel titolo non riesco a d evidenziarlo in nessun modo.

Per cui mi affido alla storia, che lo associa a Nepero.

In realtà ci sarebbe da ridire su questa affermazione, in quanto altri grandi matematici si sono occupati di questo numero "magico".

La matematica è tutta bella, ma concordo con **Gauss** che la teoria dei numeri è la regina della matematica.

Vediamo come affrontare la **trascendenza di e** ; lo faremo con una dimostrazione dovuta a **Hilbert**, eminente matematico tedesco che svolse anche una grande attività coordinatrice nella comunità matematica del tempo.

Per non parlare degli **spazi di Hilbert**, base matematica per la meccanica quantistica.

La dimostrazione tratterà a fondo delle proprietà di certi integrali.

Per comprenderle è necessario conoscere l'integrazione per parti.

Non tutti credo conoscono questa tecnica, per cui faccio un breve richiamo.

Come di consueto solo chi vuole potrà aprire tale trattazione.

Chi pensa di conoscerla bene, può andare pure avanti.

Inoltre, per chi è completamente a digiuno, consiglio la lettura degli articoli scritti da Vincenzo sugli integrali, che trovate [qui](http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2014/11/16/viva-la-matematica-da-una-ferrovia-allo-studio-delle-funzioni/):

<http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2014/11/16/viva-la-matematica-da-una-ferrovia-allo-studio-delle-funzioni/>

Quello che ci proponiamo in questa prima parte è di dimostrare che:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^n dt = n!$$

qualsiasi sia il numero naturale n .

Questo risultato ci permetterà di affrontare la dimostrazione vera e propria della trascendenza di e .

Procediamo dunque per gradi.

La funzione Gamma di eulero.

Non vogliamo fare una trattazione sulla funzione di Eulero, ma servircene con il minimo sforzo per la nostra dimostrazione. Ne ripareremo con calma più avanti.

Definiamo tale **funzione gamma** in questo modo:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt, x > 0$$

Questo a prima vista può sconcertare i non matematici; badare che è una funzione di x , numero reale, mentre l'integrale **definito** è eseguito usando t come variabile di integrazione sulla semiretta positiva.

Vogliamo dimostrare la seguente proprietà di gamma:

Per ogni $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$

Ed ecco intervenire subito l'integrazione per parti; essendo gli integrali in dt , per non creare confusione riscrivo la formula usando t come variabile di integrazione:

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t) dt = [f(t) \cdot g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt$$

L'integrale che dobbiamo calcolare è $\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^x dt$

la funzione $g'(t)$ di qui riconosciamo subito la primitiva è $g'(t) = e^{-t}$ (e tale primitiva è $g(t) = -e^{-t}$);

mentre $f(t) = t^x$, $f'(t) = x \cdot t^{x-1}$

(attenzione che la derivazione viene fatta rispetto a t)

per cui l'integrazione per parti ci dà:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^x dt = [-t \cdot e^{-t}]_0^{\infty} + x \cdot \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

Quindi abbiamo due termini; una espressione $[-t \cdot e^{-t}]_0^{\infty}$ da valutare e un integrale da calcolare.

Notiamo però subito che $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ pertanto

$$x \cdot \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = x \cdot \Gamma(x).$$

Il primo termine dobbiamo calcolarlo con un passaggio al limite:

$$[-t \cdot e^{-t}]_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} -t \cdot e^{-t} - 0 \cdot e^0 = 0 - 0 = 0$$

Quindi rimane solo il secondo termine, e pertanto:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

Applichiamo questo risultato ai **numeri naturali**; se vale per x qualsiasi, tale relazione deve valere anche per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n).$$

Consideriamo adesso $\Gamma(1)$;

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Vogliamo dimostrare che $\Gamma(n+1) = n!$

Supponiamo che tale relazione sia vera per n ; allora $\Gamma(n) = (n-1)!$

ma $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$

allora $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$

da $\Gamma(n+1) = n!$ deriva un altro fatto interessante; se consideriamo la definizione di Gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \text{ abbiamo che:}$$

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^n dt = n! \text{ che era proprio il nostro obiettivo.}$$

Teniamolo quindi bene a mente.

La prossima puntata di questa mini-serie cominceremo la dimostrazione vera è propria.

Il numero di Nepero è trascendente. Parte seconda

Nella prima parte di questa serie di articoli abbiamo lavorato a fondo con gli integrali, arrivando a questo importante risultato:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^n dt = n!$$

Cominciamo adesso la dimostrazione vera e propria della trascendenza di e ; Supponiamo per **assurdo** che il numero e sia algebrico .

Questo significa che e è radice di una equazione algebrica, di un certo grado **n**:

$$a_0 + a_1 \cdot e + a_2 \cdot e^2 + \dots + a_n \cdot e^n = 0 \quad \mathbf{1)} \text{ dove i coefficienti } \mathbf{a_0, a_1, \dots, a_n} \text{ sono dei numeri interi.*}$$

(* in realtà la definizione richiede solo che siano razionali, starà a noi farli diventare interi facendo il denominatore comune dei coefficienti).

Per non confondere le variabili che compaiono nell'integrale sopra, con il grado dell'equazione algebrica **n**, cambiamo nome alle variabili nell'integrale, in questo modo:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \cdot z^\rho dz = \rho!$$

definiamo:

$$I_\rho(a) = \int_a^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

$$J_\rho(b) = \int_0^b z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

dove a e b sono dei numeri reali, ρ un **qualsiasi** numero intero.

Consideriamo adesso $I_\rho(0)$:

$$I_\rho(0) = \int_0^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

moltiplichiamo la **1** per $I_\rho(0)$

$$a_0 I_\rho(0) + a_1 \cdot e \cdot I_\rho(0) + a_2 \cdot e^2 \cdot I_\rho(0) + \dots + a_n \cdot e^n \cdot I_\rho(0) = 0$$

adesso definiamo:

$$P_1 = a_0 I_\rho(0) + a_1 \cdot e \cdot I_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 \cdot I_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n \cdot I_\rho(n)$$

$$P_2 = a_1 \cdot e \cdot J_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 \cdot J_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n \cdot J_\rho(n)$$

Calcoliamo $P_1 + P_2$ mettendo assieme i termini con gli stessi **ai**,

cominciamo con **a1**:

$$a_1 \cdot e \cdot (I_\rho(1) + J_\rho(1))$$

$$I_\rho(1) + J_\rho(1) = \int_1^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz + \int_0^1 z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz = \int_0^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz = I_\rho(0)$$

Per i generico (**1 <= i <= n**)

$$I_\rho(i) + J_\rho(i) = \int_i^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz + \int_0^i z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz = \int_0^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz = I_\rho(0)$$

(dove abbiamo usata la proprietà degli integrali definiti:

$$\int_0^\infty = \int_0^i + \int_i^\infty)$$

Quindi i termini che moltiplicano $a_i * e^i$ sommandosi diventano tutti $I_\rho(0)$, pertanto:

$$P_1 + P_2 = a_0 I_\rho(0) + a_1 \cdot e I_\rho(0) + a_2 \cdot e^2 I_\rho(0) + \dots + a_n \cdot e^n I_\rho(0) = 0$$

quindi: $P_1 + P_2 = 0$.

Questa è adesso la nuova condizione di cui dobbiamo dimostrare **la falsità**, per poter concludere la dimostrazione per assurdo.

La prossima volta lavoreremo sulla definizione e sulle proprietà di **P1** e **P2**.

Il numero di Nepero è trascendente. Parte terza.

Premessa

Questa terza parte può sembrare la più difficile, anche se in realtà non lo è. Avremo a che fare solo con dei "semplici" polinomi, sicuramente però non ci avventureremo nello svilupparli.

Ci basterà fare degli ragionamenti sui gradi di tali polinomi.

Ragionamenti molto semplici.

Poi usando il nostro integrale fondamentale:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \cdot z^{\rho} dz = \rho!$$
 che ci fa passare da un integrale definito a dei

numeri interi, riusciremo a trovare delle proprietà interessanti per **P1**.

Nella seconda parte abbiamo elaborato delle espressioni, definendo:

$$I_{\rho}(a) = \int_a^{\infty} z^{\rho} [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

$$J_{\rho}(b) = \int_0^b z^{\rho} [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

e

$$P_1 = a_0 I_{\rho}(0) + a_1 \cdot e I_{\rho}(1) + a_2 \cdot e^2 I_{\rho}(2) + \dots + a_n \cdot e^n I_{\rho}(n)$$

$$P_2 = a_1 \cdot e J_{\rho}(1) + a_2 \cdot e^2 J_{\rho}(2) + \dots + a_n \cdot e^n J_{\rho}(n)$$

Il risultato delle nostre elaborazioni, è che se è vero che **e** è un numero algebrico, allora:

$$P_1 + P_2 = 0.$$

Il tutto è naturalmente conseguenza dell'aver supposto per assurdo che:

$$a_0 + a_1 \cdot e + a_2 \cdot e^2 + \dots + a_n \cdot e^n = 0.$$

Questa è adesso la nuova condizione di cui dobbiamo dimostrare la falsità:

$$P_1 + P_2 = 0.$$

Sicuramente se riusciamo a dimostrare che uno dei due è intero e l'altro no, avremmo concluso la dimostrazione.

Analizziamo i due termini, cominciando da **P1**;

P1 è definito come:

$$P_1 = a_0 I_\rho(0) + a_1 \cdot e I_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 I_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n I_\rho(n)$$

Vogliamo dimostrare che **P1** è un intero divisibile per $\rho!$.

Per far questo dobbiamo dimostrare che ogni singolo fattore della somma che compone **P1** lo è.

Cominciamo con $I_\rho(0)$.

$$I_\rho(0) = \int_0^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

e ricordiamo ancora il nostro integrale fondamentale:

$$\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^\rho dz = \rho!$$

Per chi vuole leggere questo esempio "*semi-numerico*":

Esempio

Consideriamo **il polinomio** formato dal prodotto di **n binomi**:

$[(z-1)(z-2)\dots(z-n)]$; consideriamo banalmente tutti i prodotti possibili; il termine di grado massimo sarà quello che si ottiene moltiplicando $z \cdot z \cdot \dots \cdot z$ **n** volte; cioè z^n ; quello di grado minimo sarà quello ottenuto moltiplicando i termini noti, ovvero $(-1)(-2)\dots(-n)$ che si può anche scrivere come $\pm n!$ a seconda che **n** sia pari o dispari; in mezzo ci stanno tutti termini di grado **g** compreso fra $0 \leq g \leq n$.

Il polinomio ottenuto viene poi elevato alla $\rho + 1$:

$$[(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1}$$

Dopo aver eseguito l'elevamento a potenza, il risultato ottenuto sarà un certo polinomio, i cui termini avranno grado compreso fra

$$0 \leq g \leq n(\rho + 1)$$

Il polinomio sarà (per evitare inutili complicazioni con gli indici, indichiamo con $b_k z^k$, un termine in posizione variabile all'interno del polinomio):

$$z^{n(\rho+1)} + \dots b_k z^k \dots \pm (n!)^{(\rho+1)}$$

(di \mathbf{k} sappiamo con certezza che è maggiore di $\mathbf{1}$; $\mathbf{b_k}$ sono numeri interi).

e se moltiplichiamo per $e^{-z} z^\rho$:

$$z^{n(\rho+1)} \cdot e^{-z} z^\rho + \dots + b_k z^k e^{-z} z^\rho + \dots \pm (n!)^{(\rho+1)} e^{-z} z^\rho$$

se adesso integriamo tale espressione:

$$\int_0^\infty (z^{n(\rho+1)} \cdot e^{-z} z^\rho + \dots b_k z^k e^{-z} z^\rho \dots \pm (n!)^{(\rho+1)} e^{-z} z^\rho) dz$$

ricordandoci che $\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^\rho dz = \rho!$ qualsiasi sia ρ ;

essendo per esempio (termine di grado maggiore):

$$\int_0^\infty z^{n(\rho+1)} \cdot e^{-z} z^\rho dz = \int_0^\infty z^{n(\rho+1)+\rho} \cdot e^{-z} dz = (n(\rho + 1) + \rho)!$$

$\left(n(\rho + 1) + \rho \right)$ un numero intero maggiore di ρ , allora,
 $\left(n(\rho + 1) + \rho \right)!$ o sarà divisibile per $\rho!$.

Questo vale anche per gli altri termini .

Un qualsiasi termine interno alla somma, $b_k z^k$, ha $\mathbf{k} > \mathbf{1}$, quindi in $b_k z^k e^{-z} z^\rho$ l'esponente di z complessivo è maggiore di ρ , e quindi l'integrale è divisibile per $\rho!$.

In particolare il termine di grado più piccolo, sarà uguale a $\pm (n!)^{\rho+1} \cdot \rho!$

Quindi $I_\rho(0)$ è divisibile per $\rho!$.

E cosa dire di $I_\rho(2), \dots, I_\rho(n)$? Tramite le sostituzioni $z \rightarrow z'+1, z \rightarrow z'+2, \dots$ ecc riusciamo a ridurre gli integrali definiti allo stesso intervallo di integrazione, dove vale $\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^\rho dz = \rho!$

Prendiamo ad esempio $I_\rho(1)$:

$$I_\rho(1) = \int_1^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

sostituendo $z \rightarrow z'+1$:

(ripeto, le sostituzioni che facciamo servono per ridurre allo stesso intervallo di integrazione, $[0, \infty)$)

$$I_\rho(1) = \int_0^\infty (z'+1)^\rho [(z'+1-1)(z'+1-2)\dots(z'+1-n)]^{\rho+1} e^{-z'-1} dz'$$

$$I_\rho(1) = \frac{1}{e} \int_0^\infty (z'+1)^\rho [(z')(z'-1)\dots(z'+1-n)]^{\rho+1} e^{-z'} dz'$$

Notiamo la comparsa di un termine in z' all'interno delle parentesi quadre; questo fa sì che il polinomio che si ottiene dai prodotti interni alle parentesi quadre, in questo caso **non ha** termine noto.

Abbiamo anche portato $1/e$ fuori dall'integrale grazie all'eguaglianza $e^{-z'-1} = e^{-z'} \cdot e^{-1} = e^{-z'} \cdot \frac{1}{e}$.

Ora il polinomio in z' dentro parentesi quadre (*risultato dei prodotti*) che chiamiamo $Q(z')$, ha grado minimo uguale a 1 ; viene elevato alla $\rho + 1$; quindi il risultato di tale elevazione sarà un polinomio $S(z')$ di grado minimo $\rho + 1$; tale polinomio in z' va poi moltiplicato per $(z'+1)^\rho$;
 $S(z') \cdot (z'+1)^\rho$

Ora, $(z' + 1)^\rho$ ha sì un termine noto, che è 1, ma il risultato del prodotto è ancora un polinomio in cui il grado minimo è ancora $\rho + 1$; quindi abbiamo una somma i termini in z' di esponente $k \geq \rho + 1$; se li moltiplichiamo per e^{-z} e poi li integriamo otteniamo un intero divisibile per $(\rho + 1)!$, ricordiamoci però che davanti va un fattore pari a $1/e$.

Dunque $e \cdot I_\rho(1)$ è divisibile per $(\rho + 1)!$.

Per le altre sostituzioni non cambia niente; se sostituiamo $z \rightarrow z'+2$, avremo un $\frac{1}{e^2}$ davanti al segno di integrale;

Quindi sarà $e^2 \cdot I_\rho(1)$ ad essere divisibile per $(\rho + 1)!$.

Pertanto:

$$P_1 = a_0 I_\rho(0) + a_1 \cdot e I_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 I_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n I_\rho(n)$$

sarà divisibile per $\rho!$.

Ricordiamo infatti che per ora ci risulta che solo gli a_1, \dots, a_n sono divisibili per $(\rho + 1)!$, mentre abbiamo visto sopra che $I_\rho(0)$ è solo divisibile per $\rho!$.

La prossima volta analizzeremo **P2**, e giungeremo alla conclusione che:

P1+P2 > 0!

Il numero di Nepero è trascendente. Parte quarta.

Ricapitoliamo

Ricordo che dobbiamo dimostrare la falsità dell'eguaglianza: $P_1 + P_2 = 0$.

Che è equivalente a dimostrare la falsità di:

$$\frac{P_1 + P_2}{\rho!} = \frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!} = 0.$$

Cioè:

$$\frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!} \neq 0$$

per un certo valore di ρ .

Il primo termine è un intero, mentre vogliamo dimostrare che il secondo non lo è.

La dimostrazione continua.

Abbiamo dimostrato che P_1 , definito da:

$$P_1 = a_0 I_\rho(0) + a_1 \cdot e I_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 I_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n I_\rho(n)$$

è divisibile per $\rho!$.

$$I_\rho(0) = \pm (n!)^{\rho+1} \cdot \rho! + N(\rho + 1)! \text{ dove } N \text{ è un certo intero.}$$

(Infatti $I_\rho(0)$ si compone di un termine divisibile per $\rho!$ e di una somma di termini tutti divisibili per $(\rho + 1)!$, per cui possiamo raccogliere: $(\rho + 1)!$)

i termini rimanenti che compongono P_1 sono:

$$a_1 \cdot e I_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 I_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n I_\rho(n)$$

e abbiamo visto che sono **tutti** divisibili per $(\rho + 1)!$

Possiamo quindi scrivere :

$P_1 = \pm a_0(n!)^{\rho+1} \cdot \rho! + a_0 N(\rho + 1)! + M(\rho + 1)!$ dove M è un intero.

Raggruppando possiamo compattare la scrittura:

$P_1 = \pm a_0(n!)^{\rho+1} \cdot \rho! + Z(\rho + 1)!$ dove $Z = M + a_0 N$ è ancora un intero.

Dividiamo adesso ambo i termini per $\rho!$

$$\frac{P_1}{\rho!} = \frac{\pm a_0(n!)^{\rho+1} \rho!}{\rho!} + \frac{Z(\rho + 1)!}{\rho!} \text{ e semplificando:}$$

$$\frac{P_1}{\rho!} = \pm a_0(n!)^{\rho+1} + Z(\rho + 1) \text{ e portando a primo membro}$$

$\pm a_0(n!)^{\rho+1}$ otteniamo:

$$\frac{P_1}{\rho!} - \left(\frac{\pm a_0(n!)^{\rho+1} \rho!}{\rho!} \right) = Z(\rho + 1) \text{ che significa:}$$

$$\frac{P_1}{\rho!} \equiv \pm a_0(n!)^{\rho+1} \pmod{\rho + 1} *$$

ovvero che $\frac{P_1}{\rho!}, \pm a_0(n!)^{\rho+1}$ danno lo stesso resto divisi per $\rho + 1$.

Il fatto che $\frac{P_1}{\rho!} \equiv \pm a_0(n!)^{\rho+1} \pmod{\rho + 1}$ è molto importante, e ci permetterà di concludere la dimostrazione nell'articolo finale.

****(due numeri a, b sono equivalenti modulo z se e solo se la loro differenza è multipla di z)***

Adesso che abbiamo finito con le proprietà di **P1**, veniamo a **P2**:

$$P_2 = a_1 \cdot e J_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 J_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n J_\rho(n)$$

Vogliamo dimostrare che per ρ abbastanza grande, $\frac{|P_2|}{\rho!}$ è un numero arbitrariamente piccolo.

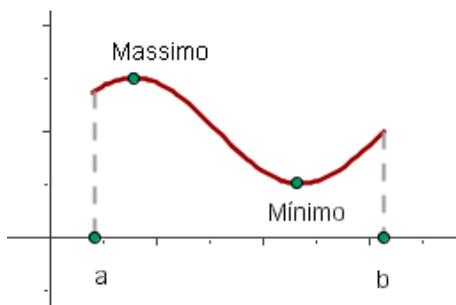
Riprendiamo la definizione dei $J_\rho(b)$:

$$J\rho(b) = \int_0^b z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz.$$

Da adesso in poi lavoreremo con i valori assoluti.

Ricordo che una funzione continua definita in un intervallo chiuso ha sempre un massimo e un minimo.

A noi, in questo contesto, ci interessa che esista un massimo.



Consideriamo il massimo K di $|z(z-1)(z-2)\dots(z-n)|$ nell'intervallo $[0, n]$ e il massimo k_1 di $|z(z-1)(z-2)\dots(z-n)e^{-z}|$ sempre in $[0, n]$, si ha:

$$|z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z}| \leq k_1 K^\rho \text{ basta infatti moltiplicare membro a membro le due disequazioni:}$$

$$|z(z-1)(z-2)\dots(z-n)|^\rho \leq K^\rho$$

$$|z(z-1)(z-2)\dots(z-n)e^{-z}| \leq k_1$$

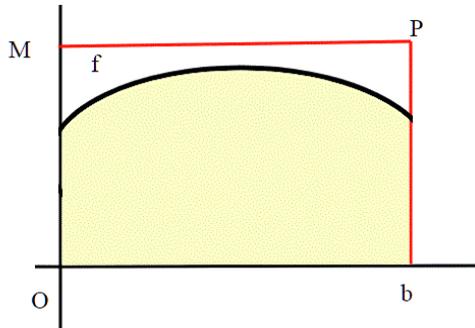
consideriamo adesso i singoli integrali

$$|J\rho(b)| \leq \int_0^b |z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z}| dz$$

per $\mathbf{b=1\dots n}$

per ogni \mathbf{b} avremo $|J\rho(b)| \leq bk_1 K^\rho$, visto che \mathbf{b} è l'ampiezza dell'intervallo.

$$\begin{cases} |J_\rho(1)| \leq 1 \cdot k_1 K^\rho \\ |J_\rho(2)| \leq 2 \cdot k_1 K^\rho \\ \dots \\ |J_\rho(n)| \leq n \cdot k_1 K^\rho \end{cases}$$



Chiaramente l'area sottesa da una funzione f positiva limitata da un numero M è minore del prodotto $M \cdot b$ che è l'area del rettangolo $OMPb$ che la contiene.

Sommiamo adesso tutti i membri di destra e di sinistra e poi poniamo

$$k_2 = (|a_1|e + 2|a_2|e^2 + \dots + n|a_n|e^n) \cdot k_1$$

Otteniamo:

$$|P_2| = |a_1 \cdot e J_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 J_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n J_\rho(n)| < |a_1 \cdot e J_\rho(1)| + |a_2 \cdot e^2 J_\rho(2)| + \dots + |a_n \cdot e^n J_\rho(n)|$$

ma quest'ultima espressione è minore di

$(|a_1|e + 2|a_2|e^2 + \dots + n|a_n|e^n) \cdot k_1 K^\rho$ e la somma dentro parentesi è proprio k_2 .

Concludiamo allora che $|P_2| \leq k_2 K^\rho$, e quindi $\frac{|P_2|}{\rho!} \leq \frac{k_2 K^\rho}{\rho!}$.

Il termine di destra può assumere valori molto piccoli al crescere di ρ .

Ma lo vedremo in dettaglio nella prossima parte, che sarà anche quella finale.

Il numero di Nepero è trascendente. Parte quinta

(E ultima parte)

Siamo arrivati alla fine.

Prima di fare un breve riassunto vorrei ricordare un limite fondamentale:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{K^\rho}{\rho!} = 0 \quad \mathbf{1)}$$

qualsiasi sia \mathbf{K} intero.

Chi conosce il criterio del rapporto per le successioni, può verificarlo immediatamente.

Nell'articolo sui polinomi di Niven, che trovate [qui](#):

<http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2018/05/25/ultime-proprietà-del-polinomio-niven-seguito-degli-ultimi-miniquiz/>

trovate una spiegazione.

Un'altro risultato importante

Dati due numeri $\mathbf{a, b}$ è sempre possibile trovare un numero \mathbf{c} primo con il prodotto \mathbf{ab} .

Basta scomporre il prodotto \mathbf{ab} in fattori primi; per trovare un \mathbf{c} primo con \mathbf{ab} , basta prendere dei fattori primi che non sono nella scomposizione di \mathbf{ab} . Che questo avvenga sempre, è conseguenza del **teorema dell'infinità dei numeri primi**: comunque si scelga un numero naturale \mathbf{k} , esiste sempre un numero primo maggiore di \mathbf{k} .

Questo teorema era già noto a Euclide (Elementi (libro IX, proposizione 20).

Esempio:

Sia $\mathbf{a=5}$, $\mathbf{b=12}$ quindi $\mathbf{ab=3 \cdot 5 \cdot 2^2}$ è la scomposizione in primi.

Basta prendere un \mathbf{c} con fattori primi che non compaiono in tale scomposizione.

Ad esempio $\mathbf{c=7}$. notiamo poi che \mathbf{c} possiamo prenderlo grande quanto vogliamo, infatti 7^n va bene qualsiasi \mathbf{n} e possiamo ingrandirlo quanto vogliamo.

Un piccolo richiamo sulle classi di resti modulo z . (3)

Ricordo che due numeri a, b sono equivalenti modulo z se danno lo stesso resto divisi per z .

In simboli questo si scrive: $a \equiv b \pmod{z}$.

Da questa definizione vogliamo trarre un piccola ma importante conclusione: supponiamo che b non sia divisibile per z ; allora nemmeno a è divisibile per z , in quanto deve dare lo stesso resto.

Inoltre a non è zero; infatti se a fosse zero, allora sarebbe divisibile per z , in quanto $0 \cdot z = 0$, quindi prendendo $q=0$, avremmo $q \cdot z = a$.

Finiamo la dimostrazione riassumendo.

Nella prima parte abbiamo parlato della funzione gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

e abbiamo visto che per valori di x interi, l'integrale vale:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^n dt = n!.$$

Nella seconda parte, abbiamo impostato una dimostrazione per assurdo; se e non è trascendente allora deve essere algebrico, ovvero deve esistere un polinomio a coefficienti interi, a_0, a_1, \dots, a_n , tale che e sia radice di tale polinomio. In formule:

$$a_0 + a_1 \cdot e + a_2 \cdot e^2 + \dots + a_n \cdot e^n = 0.$$

Notiamo una cosa, anche se non lo abbiamo mai detto esplicitamente:

possiamo supporre che termine noto a_0 sia diverso da zero.

Infatti, supponiamo che e sia radice di un polinomio

$p(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$ a coefficienti interi in cui il termine noto è nullo.

Sia k il minimo valore per cui $b_k \neq 0$. dividiamo allora il polinomio per x^k , ottenendo;

$$p(x) = x^k(b_k + \dots b_n x^{m-k})$$

deve essere ancora $p(x)=0$ quando $x=e$; questo significa che $b_k + \dots b_n e^{m-k} = 0$, essendo e diverso da zero.

Quindi e è radice di un polinomio a coefficienti interi in cui il termine noto è diverso da zero.

Continuiamo a chiamare i coefficienti di questo polinomio a_0, a_1, \dots, a_n .

Sempre nella seconda parte, definendo opportune espressioni:

$$P_1 = a_0 I_\rho(0) + a_1 \cdot e \cdot I_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 \cdot I_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n \cdot I_\rho(n)$$

$$P_2 = a_1 \cdot e \cdot J_\rho(1) + a_2 \cdot e^2 \cdot J_\rho(2) + \dots + a_n \cdot e^n \cdot J_\rho(n)$$

dove :

$$I_\rho(a) = \int_a^\infty z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

$$J_\rho(b) = \int_0^b z^\rho [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{\rho+1} e^{-z} dz$$

tramite l'integrale $\int_0^\infty e^{-z} \cdot z^\rho dz = \rho!$ e opportuni calcoli e raccogliimenti siamo riusciti a dimostrare che se è vero che e non è trascendente, ossia che è algebrico, allora $P_1 + P_2 = 0$.

Questa è adesso la condizione di cui dimostrare la falsità.

Questa è adesso la condizione di cui dimostrare la falsità.

Nelle terza parte, abbiamo dimostrato che P_1 è un numero divisibile per $\rho!$, nella quarta invece che

$$\frac{P_1}{\rho!} \equiv \pm a_0 (n!)^{\rho+1} \pmod{\rho + 1}.$$

Per quanto riguarda **P2**, sempre nella quarta parte, abbiamo visto che

$$\frac{|P_2|}{\rho!} \leq \frac{k_2 K^\rho}{\rho!}.$$

Ed eccoci al gran finale.

Come preannunciato nell'ultimo articolo, ci basterà dimostrare che esiste un ρ (grande) tale che:

$\frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!} \neq 0$. Sappiamo che $\frac{P_1}{\rho!}$ è un intero; ed è anche un numero diverso da zero.

Infatti $\frac{P_1}{\rho!} \equiv \pm a_0 (n!)^{\rho+1} \pmod{\rho + 1}$; possiamo scegliere un ρ tale che $\rho + 1$ sia primo con $a_0(n!)$.

In pratica cerchiamo un $\rho+1$ che non abbia fattori in comune con $a_0(n!)$. Come si fa? Ricordiamoci cosa abbiamo detto in (3): si scompone in fattori primi $a_0(n!)$ e si sceglie poi un primo che non contenga nessuno dei suddetti fattori.

Notiamo poi che possiamo farlo grande quanto vogliamo, prendendo un esponente grande a piacere.

Questo vuole anche dire che $\pm a_0(n!)^{\rho+1}$ è primo con $(\rho + 1)$.

Quindi non è divisibile con $(\rho + 1)$.

Ma allora nemmeno $\frac{P_1}{\rho!}$ è divisibile per $(\rho + 1)$, essendo

$\frac{P_1}{\rho!} \equiv \pm a_0 (n!)^{\rho+1} \pmod{\rho + 1}$, ovvero avendo lo stesso resto se diviso per $(\rho + 1)$.

Quindi per (3) possiamo escludere il fatto che $\frac{P_1}{\rho!}$ sia nullo.

Che dire adesso di P_2 ? $\frac{|P_2|}{\rho!} \leq \frac{k_2 K^\rho}{\rho!}$ ma come abbiamo visto all'inizio dell'articolo $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{K^\rho}{\rho!} = 0$.

Chiaramente anche $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{k_2 K^\rho}{\rho!} = 0$, quindi riusciamo a trovare un ρ tale che $\frac{|P_2|}{\rho!} \leq \frac{k_2 K^\rho}{\rho!} < 1$.

Osserviamo che ogni ρ maggiore di questo va bene, quindi prendiamo un ρ che soddisfi entrambi le condizioni, ovvero che sia primo con $a_0(n!)$.

Quindi $\frac{P_1}{\rho!}$ è un intero non nullo, mentre $\frac{|P_2|}{\rho!} < 1$.

Quindi la somma $\frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!}$ non può essere nulla.

Questo prova che e è trascendente!

Un progetto ambizioso

Con l'articolo sul piano proiettivo si conclude la serie "Matematizziamo il nastro di Mobius" in cui sono stati esposti i concetti fondamentali della topologia generale.

Ma la topologia non finisce qui.

Il tutto andrà poi esteso alle **tri-varietà**; fino ad ora ci siamo occupati di superfici, ma adesso cominceremo a parlare anche di varietà tridimensionali, che sono i possibili modelli dell'universo che ci circonda.

Poincarè, per classificare le superfici e le varietà, sviluppò quella che oggi si chiama "**topologia algebrica**".

Successivamente, enunciò una congettura che sarebbe passata alla storia, nota appunto come **congettura di Poincarè**.

Siamo **quasi in grado** di capire l'enunciato della congettura, ci mancano solo pochi concetti di topologia algebrica, quali le **omologie** e le **omotopie** e il **gruppo fondamentale**.

Tutto questo sarà l'argomento del primo articolo.

Il mio nuovo progetto, che si chiamerà "**La sfera di Poincarè**" parlerà del percorso durato 100 anni e delle tecniche che si svilupparono parallelamente ai tentativi di risoluzione della stessa congettura, fino alla soluzione formale data da **Grigori Perelman**, un matematico russo.

Parleremo di concetti nuovi e forse sconosciuti ai più, quali i flussi geometrici (**flusso di Ricci**) e le congetture di geometrizzazione (**Thurston**).

Chiaramente l'esposizione non sarà completamente quantitativa; riusciremo a parlare di **spazi tangenti** e **varietà Riemmane** anche senza impegolarci nella **geometria differenziale** o nel calcolo tensoriale, con l'aiuto della grafica e se servirà anche del software.

L'unico prerequisito sarebbe la conoscenza del calcolo differenziale... ma vedremo poi come introdurre i concetti che lo riguardano in modo semplice. So che forse sto facendo il passo più lungo della gamba, ma è tanto che ci penso, e se non lo faccio adesso (*ho quasi 60 anni*) non lo farò mai più.

Penso che queste serie di articoli durerà un anno, o forse un po' di più. Grazie dell'attenzione.

Umberto (16/06/19)

Le omotopie e la semplice connessione.

Premessa storica

Nei primi anni del 1900 *Poincarè* stava costruendo la *topologia algebrica*, in particolare sviluppò un strumento chiamato **omologia** che gli permise di classificare le varietà di dimensione due.

Estese le omologie anche alle varietà di dimensione 3 ma si accorse che tale strumento non era quello più appropriato.

Non parleremo delle omologie, sia perché sono tecnicamente difficili, sia perché si dimostrarono non completamente efficaci.

Poincarè trovò un altro sistema per classificare le varietà; le **omotopie** e **il gruppo fondamentale**.

Di questo parleremo in questo primo articolo.

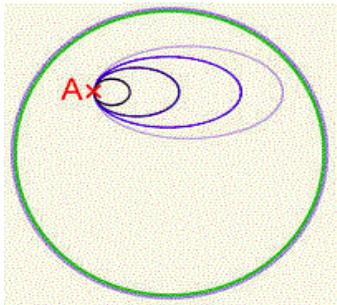
Le omotopie (dal greco *homos* = identico e *topos* = luogo) serviranno per introdurre il concetto di gruppo fondamentale e di **semplice connessione**. L'idea intuitiva, per esplorare le superfici e le varietà topologiche, è di partire da un punto e tornare in esso stendendo una corda.

Pensiamo di fissare la corda con un chiodo e di andare in giro per la superficie srotolando la corda.

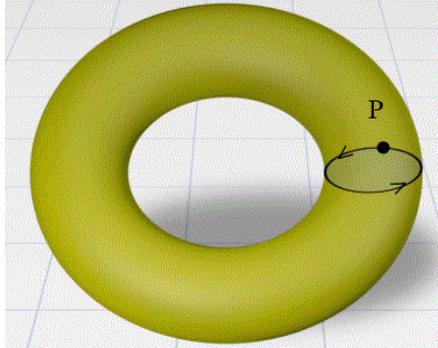
Dopodiché tornare al chiodo e cercare di riavvolgere la corda, tenendo sempre legato l'altro estremo al chiodo.

Se questo è sempre possibile, qualsiasi sia il punto da dove si parte e qualsiasi sia il percorso, diremo che la superficie è **semplicemente connessa**.

Abbiamo due esempi lampanti di superfici dove questo si possa o non si possa fare; la sfera e il toro:



Nel caso della sfera non c'è dubbio che riusciamo a riavvolgere la corda una volta tornati in A; quindi la sfera è semplicemente connessa.



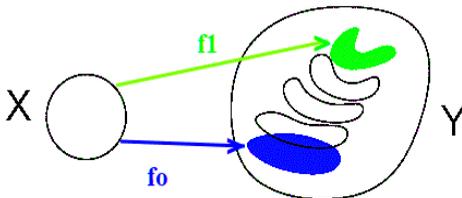
*Nel caso del toro, non sempre riusciamo a riavvolgere la corda; se partiamo da P e passiamo attraverso il buco del toro, una volta tornati in P non riusciamo a riavvolgere la corda. Quindi il toro **non** è semplicemente connesso.*

Intuitivamente, la semplice connessione ci fa capire se la varietà "ha buchi" o no.

Questo fu proprio il punto di partenza di Poincaré per classificare le varietà topologiche. Per formalizzare la semplice connessione abbiamo bisogno di un concetto importante:

L'OMOTOPIA

Date due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$, dove X, Y sono due spazi topologici diremo intuitivamente che f_0, f_1 sono **omotope** se f_1 si ottiene per deformazione continua da f_0 :



Detto formalmente, e indicando con $I = [0, 1]$, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ si dicono omotope se esiste una funzione continua, $F : X \times I \rightarrow Y$ tale che per ogni $x \in X$ si abbia:

$F(x, 0) = f_0(x)$; $F(x, 1) = f_1(x)$.

Per indicare che f_0, f_1 sono omotope scriveremo $f_0 \sim f_1$.

Se poi poniamo $f_t(x) = F(x, t)$ avremo una famiglia di funzioni dipendenti dal parametro $t \in [0, 1]$ che variano con continuità da f_0 a f_1 .

Facciamo subito un esempio; se $X = Y = D^2$, ovvero il disco piano, consideriamo come f_0 l'identità su D^2 , ovvero la funzione che manda ogni punto in se stesso.

Mentre per f_1 la funzione costante, $f_1 = 0$.

Se consideriamo la funzione $F(x, t) = (1 - t)x$, essa realizza un'omotopia tra f_0 e f_1 .

Infatti $f_0(x) = (1-0)x = x$ che è l'identità.

Mentre $f_1(x) = (1-1)x = 0$.

IL GRUPPO FONDAMENTALE

In uno degli articoli della vecchia serie sul nastro di Mobius, (parte quinta) abbiamo trattato la connessione per archi, di conseguenza abbiamo introdotto il concetto di arco:

Sia X uno spazio topologico.

Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$.

Sia $f: [0, 1] \rightarrow X$ una funzione continua.

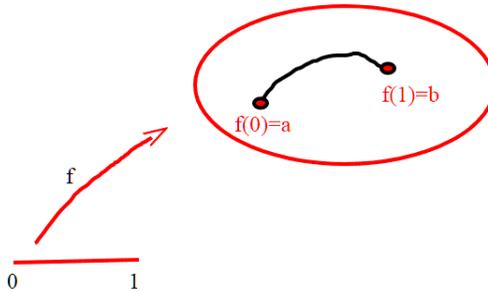
Tale funzione prende il nome di **arco** su X (è una linea continua contenuta in X).

L'arco viene anche chiamato **cammino**.

Ricordiamo anche la definizione di connessione per archi:

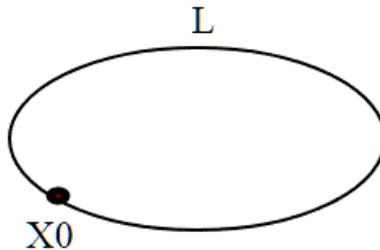
Diciamo che il nostro spazio X è **connesso per archi**, se comunque **scegliamo due punti a, b esiste un arco f tale che $f(0) = a$, $f(1) = b$** .

Noi tratteremo d'ora in poi spazi connessi per archi.



$f(0)$ viene anche chiamato punto iniziale, e $f(1)$ punto finale (del cammino).
 Se $f(0)=f(1)$ allora il cammino diventa un cammino chiuso, e viene anche chiamato **cappio**.

Diremo ancora più precisamente, se $x_0 = f(0) = f(1)$, che è un cappio di punto base x_0 .



Consideriamo adesso l'insieme dei cappi (**base x_0**) che sono omotopi.
 Essere omotopi è una **relazione d'equivalenza**.

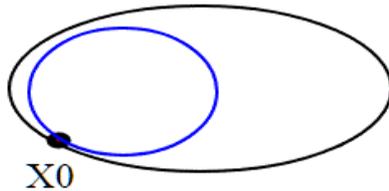
Chiamiamo $\pi(X, x_0)$ l'insieme quoziente di tale relazione d'equivalenza.
 Intuitivamente (come abbiamo visto sopra per la corda) questo insieme dovrà darci delle informazioni sulla struttura della spazio X ; vogliamo definire sull'insieme $\pi(X, x_0)$ una operazione interna.

Trattandosi di applicazioni, la cosa più naturale è pensare alla composizione:

siano $[\alpha], [\beta] \in \pi(X, x_0)$

definiamo: $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$

questa operazione è ben definita, ovvero non dipende dai rappresentanti scelti per le due classi.



Due cappi equivalenti, uno si riduce all'altro tramite omotopia.

Si dimostra (*noi non lo faremo*) che con questa operazione $\pi(X, x_0)$ diventa un gruppo, ossia soddisfa alle tre proprietà:

1. **proprietà associativa**
2. **esistenza elemento neutro**
3. **esistenza dell'inverso per ogni elemento.**

Il gruppo $\pi(X, x_0)$ prende il nome di **GRUPPO FONDAMENTALE** di X ed è uno degli oggetti più affascinanti della topologia algebrica.

Esso dà informazioni su come è fatto lo spazio topologico X , senza pensare a dove sia immerso.

(a scanso di equivoci, il gruppo fondamentale in uno spazio connesso per archi non dipende dal punto scelto; se infatti x_0, y_0 sono due punti dello spazio X e se esiste **un arco f** che congiunge x_0 con y_0 , allora si dimostra che $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, y_0)$.)

Essendo per ipotesi X connesso per archi, questo vale qualsiasi siano i due punti.)

Perchè costruire i gruppi fondamentali di un insieme topologico?

Quello che interessa di più in topologia, è vedere se due spazi sono omeomorfi.

Spesso però questo è difficile; si prova perciò a confrontare i rispettivi gruppi fondamentali; se sono isomorfi, allora i due spazi sono omeomorfi.

Ricordo che due gruppi sono isomorfi se esiste una corrispondenza biunivoca fra i due che conserva le operazioni.

Per il matematico due gruppi isomorfi sono algebricamente lo stesso oggetto, come lo sono due spazi topologici omeomorfi.

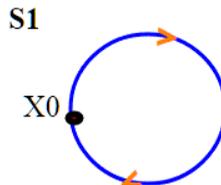
Per trovare il gruppo fondamentale dobbiamo trovare tutte le classi di equivalenza dell'insieme quoziente $\pi(X, x_0)$.

Dobbiamo ragionare dunque sui **cappi omotopi**.

Due esempi molto significativi.

Ma vediamo degli esempi; trovare qual è il gruppo fondamentale della circonferenza o del toro non è effettivamente la cosa più semplice di questo mondo.

Noi procederemo per intuizione e cominciamo dalla circonferenza.



Il nostro insieme X consiste dunque in una circonferenza.

I cappi, dovendo stare su di essa, sono rappresentati da degli archi.

I cappi sono degli archi che fanno uno o più giri completi della circonferenza, partendo da X_0 e tornando in X_0 .

Essi non sono riducibili ad un punto, e **non sono fra di loro omotopi**.

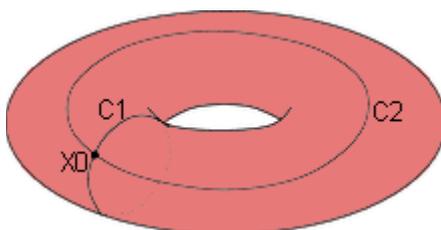
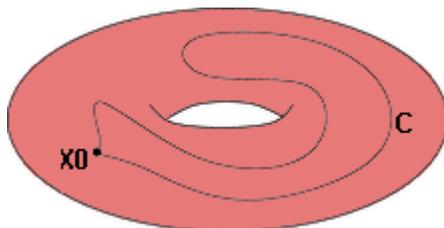
Il cappio costante corrisponde invece a zero giri.

Quindi le classi di equivalenza rispetto all'omotopia sono tante quanti i numeri interi (possiamo girare in senso orario o antiorario).

Concludiamo dicendo che il gruppo fondamentale della circonferenza è \mathbf{Z} , anzi è **isomorfo a \mathbf{Z}** .

Per quanto riguarda il toro, il coppia C del disegno può ridursi con continuità ad un punto.

Non ci dà quindi nessuna informazione sui possibili buchi.



I cappi C_1 e C_2 non possono ridursi ad un punto; entrambi individuano il buco nel toro.

Trovare il gruppo fondamentale del toro significa trovare tutte le classi di equivalenza della relazione di omotopia.

Se partiamo dal cappio C_1 , ad ogni giro successivo avremmo un cappio non omotopo al precedente.

Questo vale anche per C_2 .

Se poi componiamo due qualsiasi di questi cappi, otteniamo un terzo cappio, che non è omotopo a nessuno dei due.

Quindi avremo in totale $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ classi di equivalenza distinte.

Possiamo dire che il gruppo fondamentale del toro è omeomorfo a $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

La connessione semplice

Eccoci arrivati al dunque; fra tutti i gruppi consideriamo quello banale, che consta di un solo elemento.

Diremo che uno spazio X è **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è il gruppo banale.

Il gruppo banale consta dunque di un solo elemento.

Se chiamiamo e tale elemento, esso deve essere sia l'inverso di se stesso e sia l'elemento neutro del gruppo.

Questo elemento altro non può essere che il coppia costante, ovvero un punto.

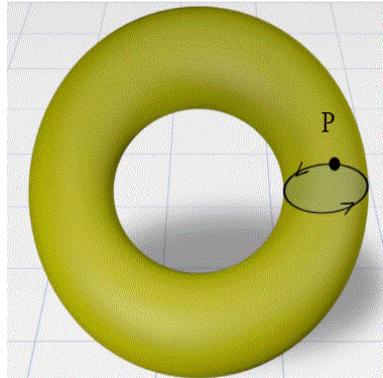
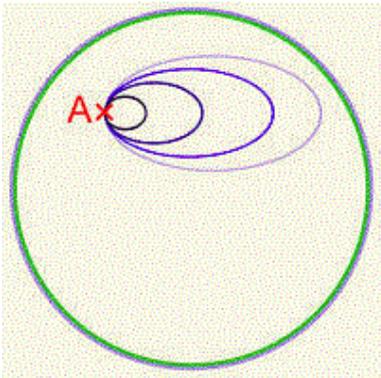
Sappiamo che per trovare il gruppo fondamentale di X dobbiamo considerare un punto X_0 su X e trovare le classi di equivalenza dei cappi rispetto alla omotopia.

Quindi dobbiamo considerare i cappi omotopi con punto base X_0 .

Se tutti i cappi si riducono a un punto, allora X è semplicemente connesso.

Per quanto visto sopra nella definizione di gruppo fondamentale, questo deve valere per qualsiasi altro punto Y_0 diverso da X_0 .

La sfera è **semplicemente connessa**, mentre il **toro non lo è**:



Nel toro non tutti i cappi si riducono ad un punto (come abbiamo visto sopra).

Mentre nella sfera sì, qualsiasi sia il punto A .

Nel toro infatti il gruppo fondamentale è il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, che non è il gruppo banale.

Avremmo potuto parlare di semplice connessione senza parlare di gruppo fondamentale, ma questo è il percorso storico che fece arrivare Poincaré alla congettura.

Avremmo cioè potuto dare la definizione più in uso che riassume i discorsi fatti sopra:

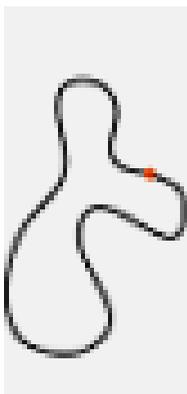
Uno spazio topologico si dice semplicemente connesso se è connesso per archi e ogni curva chiusa giacente su di esso può essere deformata fino a ridursi a un singolo punto.

Ma da dove ha origine il termine "semplice connessione"?

Perchè "semplice connessione"?

Ricordo che una curva semplice chiusa è in pratica una curva che non ha *auto-intersezioni*.

Ogni curva semplice chiusa è omeomorfa chiaramente alla circonferenza.

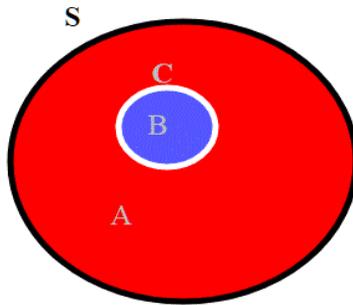


Curva chiusa semplice



Curva chiusa intrecciata

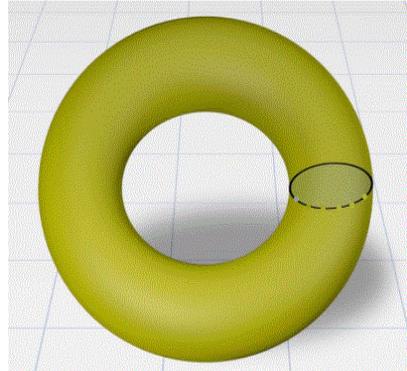
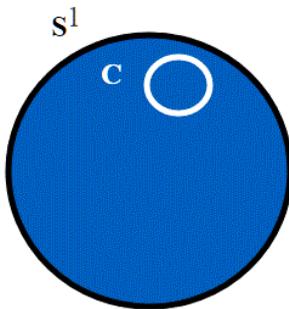
Si dice che una curva chiusa semplice C appartenente ad una superficie S separa S se $S \setminus C$ non è connesso, ovvero la superficie viene tagliata in due pezzi da C .



Se C separa S vuol dire che divide S in due sottoinsiemi A e B che non sono connessi.

Da questo concetto deriva la terminologia "**semplicemente connesso**".

La sfera è connessa in modo più semplice del toro, in quanto la prima si riesce a separare con una curva chiusa semplice, mentre non è possibile separare il secondo con una sola curva chiusa semplice.



C separa la sfera che sappiamo essere semplicemente connessa.
 C non separa il toro che rimane connesso.

L'enunciato della congettura di Poincaré.

Nel primo articolo abbiamo parlato di omotopie e di gruppo fondamentale. Ricordo che il gruppo fondamentale è un insieme, e precisamente l'insieme quoziente dell'insieme dei cappi su X (spazio topologico) che sono omotopi, ovvero riducibili uno all'altro con una trasformazione continua. In qualche modo (ossia qualitativamente) abbiamo verificato tale insieme nel caso della circonferenza e del toro.

Ricordate il piano proiettivo? Lo abbiamo visto nella trattazione del nastro di mobius.

Che cosa sarà il gruppo fondamentale del piano proiettivo? Bè, non è proprio la cosa più semplice da calcolare.

Per farlo esiste un teorema, il **teorema di Van Kampen**, uno dei più importanti della topologia algebrica, ed uno dei principali strumenti per il calcolo del gruppo fondamentale.

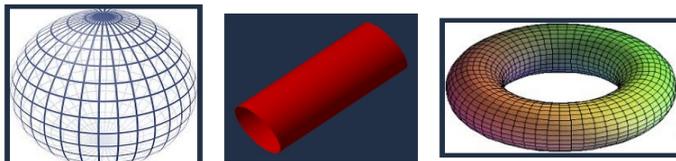
Il teorema è in grado di calcolare il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X partendo dal calcolo su due aperti A, B di cui esso è unione.

In questo caso si dimostra che il gruppo fondamentale del piano proiettivo è composto da due elementi; il cappio costante (un punto) ed un altro cappio. Si dice anche che il gruppo del piano proiettivo è isomorfo a Z_2 (classe di resti modulo 2, consta di due elementi $0, 1$).

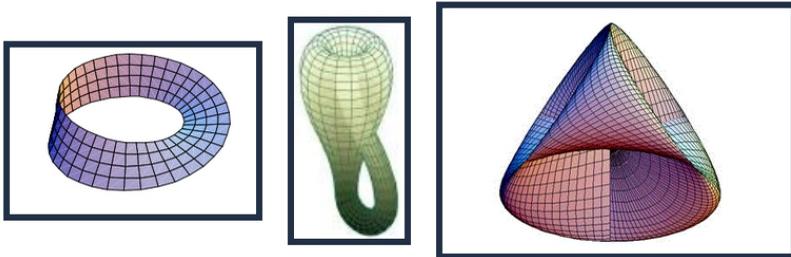
Per capire bene da dove scaturisce l'enunciato della congettura, dobbiamo prima parlare di superfici e della loro classificazione.

Parliamo di superfici

Sappiamo che nel caso $n=2$, le varietà topologiche sono le superfici. Abbiamo trattato nella nostra prima serie topologica, tutte le superfici più importanti e che maggiormente ci interessano. Sfera, cilindro e toro sono esempi di superfici orientabili;



Mentre il nastro di MÖBIUS , la bottiglia di Klein e il piano proiettivo sono altrettanti esempi di superfici non orientabili.



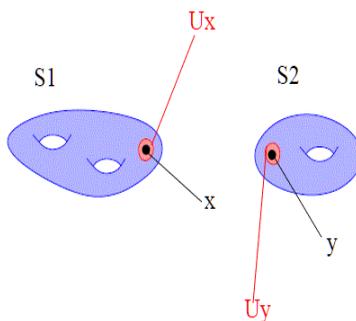
Quello che hanno dimostrato i matematici, è che qualsiasi superficie compatta e connessa si può ottenere come somma connessa di alcune di queste superfici fondamentali.

Ma cos'è la **somma connessa**?

La somma connessa di superfici.

Con la topologia quoziente ci siamo divertiti a costruire nuovi spazi topologici incollando i lati di un quadrato in vari modi.

Supponiamo ora di avere due superfici **S1**, **S2** compatte e di scegliere due punti **x**, **y** su di esse.



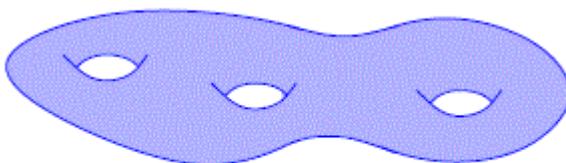
Consideriamo due intorni "tondi" di x e y , rispettivamente U_x e U_y .
 Con "tondi" si intende che siano omeomorfi a D^2 , ovvero al disco unitario del piano.

Consideriamo i bordi di U_x e U_y , rispettivamente $\partial U_x, \partial U_y$.

Senza entrare troppo nei particolari tecnici, incolliamo i due bordi $\partial U_x, \partial U_y$.

Otteniamo al solito uno spazio quoziente; tale spazio, che chiamiamo S è connesso e compatto, ed è una superficie detta **somma connessa** di S_1, S_2 e indichiamo tale somma con il simbolo $\#$:

$$S=S_1\#S_2$$



$$S=S_1 \# S_2$$

La somma connessa non dipende, a meno di omeomorfismi, dai punti scelti x, y .

La classificazione delle varietà

Un problema base della topologia è la classificazione delle varietà topologiche.

Esistono più teoremi o metodi di classificazione.

Soffermiamoci per ora alle le varietà di dimensione **1** e **2**; una varietà connessa di dimensione **1** (una linea) è omeomorfa alla circonferenza se è compatta o alla retta se non lo è.

Per le varietà a **2** dimensioni ,una varietà a **2** dimensioni connessa e compatta è omeomorfa alla sfera o ad una somma connessa di tori se è orientabile o ad una somma connessa di piani proiettivi se non è orientabile.

Questo appena annunciato è un teorema importante, che però non possiamo dimostrare*.

(*)In realtà tutto si può fare... intendo fare una cernita dei risultati più im-

portanti e fare degli approfondimenti a parte con la dimostrazione di tali teoremi.)

Il teorema scritto formalmente:

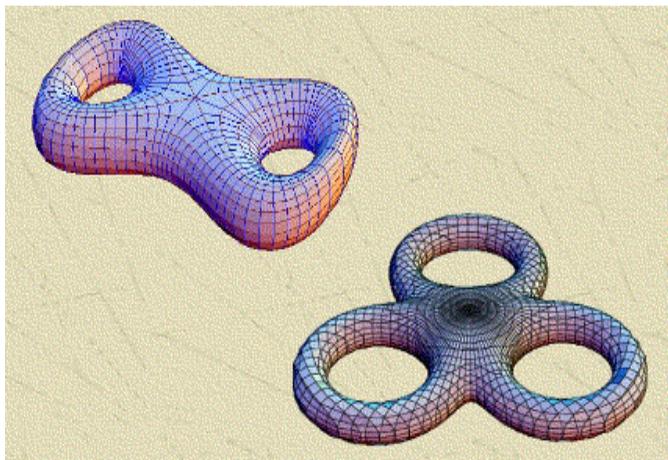
1)Teorema di classificazione delle superfici:

Ogni superficie connessa, chiusa* e compatta è omeomorfa ad una delle superfici:

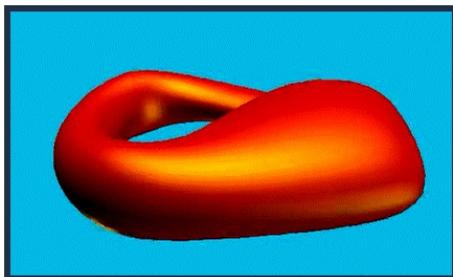
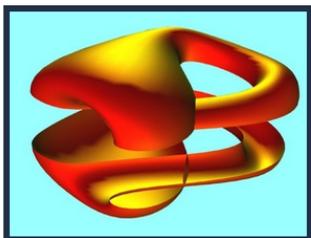
1. la sfera S^2
2. Una somma connessa di tori: $T^2 \# \dots \# T^2$
3. Una somma connessa di piani proiettivi: $P^2 \# \dots \# P^2$

(*Ricordo che una superficie chiusa è una superficie senza bordo, che è poi orientabile se non contiene alcun nastro di Mobius.)

Ma vediamo due esempi importanti:



Somma connessa di più tori



Somma connessa di due piani proiettivi dà la bottiglia di Klein.

Conseguenze del teorema di classificazione delle superfici.

Tenendo fede all'enunciato originale della congettura, possiamo metterci nelle ipotesi del teorema di classificazione; avremo una superficie \mathbf{M} compatta, chiusa ed orientabile.

Dal teorema **di classificazione** risulta che l'unica superficie \mathbf{M} compatta, chiusa ed orientabile e in più semplicemente connessa è la sfera.

Consideriamo infatti una superficie compatta \mathbf{M} semplicemente connessa. Sappiamo che per \mathbf{M} il gruppo fondamentale è quello banale, essendo semplicemente connessa.

Si vede però intuitivamente che la somma connessa di più tori non può avere un gruppo fondamentale banale (sappiamo che il toro ha gruppo fondamentale $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$). \mathbf{M} non può essere nemmeno somma connessa di piani proiettivi, in quanto tali piani ***non sono orientabili, mentre \mathbf{M} si.***

Per cui \mathbf{M} può essere ***omeomorfa*** solo alla sfera.

Si ha pertanto il seguente risultato, ben noto a Poincarè:

Teorema:

Una superficie chiusa, compatta semplicemente connessa *, orientabile è omeomorfa alla sfera .

(*ricordiamoci che una superficie semplicemente connessa è connessa per archi, e che una superficie connessa per archi è connessa).

E qui cominciano... i guai.

Poincaré cominciò a pensare alle varietà di dimensione $n=3$.

Per esse non esisteva allora un teorema di classificazione, pertanto risultò naturale enunciare la congettura:

Congettura di Poincaré:

Ogni varietà tridimensionale chiusa, compatta e semplicemente connessa è omeomorfa (deformabile) alla 3-sfera.

Quindi per $n=3$, varrebbe lo stesso teorema che per $n=2$.

Non ci occuperemo di altre dimensioni; oltretutto in certi casi, per $n=4$ la congettura è stata dimostrata in modo abbastanza diretto.

Per $n=3$, ci sono invece voluti 100 anni.

Nel prossimo articolo cercheremo di chiarire dettagliatamente cos'è un varietà tridimensionale, anche detta **tri-varietà**, e quale sia la sua importanza nella conoscenza della forma dell'universo.

Le trivarietà.

Come specificato nel riassunto, scopo di tale articolo è spiegare in modo un po' più semplice il concetto di spazio "curvo" ovvero di varietà tridimensionale, abbreviata in tri-varietà.

Premessa

Le trivarietà sono varietà topologiche di dimensione 3.

I primi contributi sostanziali alla teoria topologica delle trivarietà furono portati a cavallo del 1900 da **Henri Poincaré**, **Max Dehn** e **Poul Heegaard**. Una difficoltà nello studio delle trivarietà è dovuta al fatto che la visualizzazione diretta deve parzialmente cedere il posto a **rappresentazioni astratte**. Molte superfici possono essere visualizzate perché si possono vedere esternamente dalla terza dimensione, una dimensione più alta della dimensione della superficie.

La dimensione in più consente alla superficie di piegarsi e chiudersi su se stessa.

Si potrebbe tentare di visualizzare esternamente una trivarietà, come se la si vedesse da uno spazio a quattro o più dimensioni, ma acrobazie simili, in effetti, non sono necessarie.

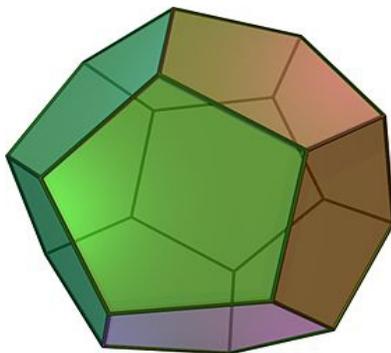
Le possibili "forme" dell'universo.

Migliaia di anni fa molti pensavano che la Terra fosse piatta.

La piatezza della superficie terrestre doveva essere sembrata evidente a chiunque avesse spaziato con lo sguardo sul mare o su una pianura; da ciò si concludeva, e non del tutto senza ragione, che la superficie della Terra dovesse essere o infinita o avere un bordo.



Oggi sappiamo, che questo è errato: ciò di cui ci si rende conto meno spesso è che le medesime osservazioni locali potrebbero essere determinate da un numero illimitato di forme terrestri.



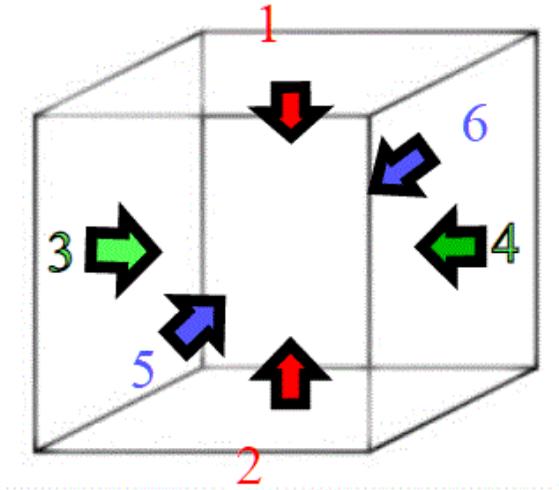
Un modello possibile per la topologia dello spazio è la trivarietà scoperta nel 1932 da **Herbert Seifert** e **C. Weber**.

La possiamo rappresentare solo in modo astratto, tramite incollature delle facce, non avendo a disposizione 4 o 5 dimensioni.

Potrebbe anche essere che la terra avesse una forma irregolare o a «salvagente» (toro).

Pensando invece allo spazio, un osservatore sulla Terra non può concludere che l'universo conservi la struttura geometrica dell'ordinario spazio euclideo a distanze indefinite, sebbene non vi sia ancora nessuna prova del contrario.

Se la struttura dell'universo non è euclidea, quali sono le alternative?



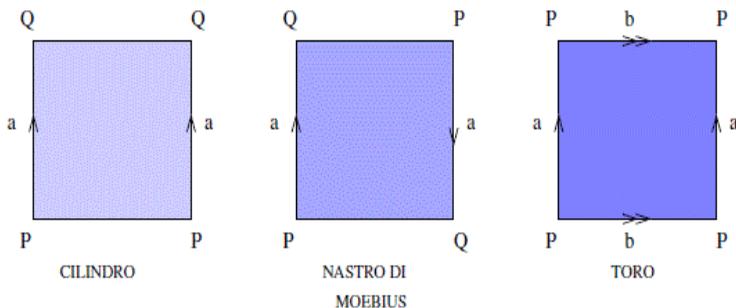
Un "salvagente" tridimensionale, ovvero un tritoro. Anche questo visualizzabile solo in modo astratto. Vedremo la sua costruzione più avanti

<<Un'idea è che lo spazio possa essere «curvo», così come può essere curva una superficie. La curvatura tridimensionale dello spazio e la curvatura quadridimensionale dello spazio e del tempo (un concetto strettamente legato al precedente) sono diventate idee importanti in astronomia e in cosmologia a causa del loro ruolo chiave nella teoria della relatività generale di Einstein. Alcuni tipi di strutture tridimensionali possibili dell'universo si possono specificare per analogia con **le superfici bidimensionali**. In realtà, poiché lo spazio e il tempo sono trattati nella teoria della relatività come una singola entità chiamata **spazio-tempo**, si potrebbe supporre che la struttura matematica appropriata dell'universo debba essere **quadridimensionale**. >>

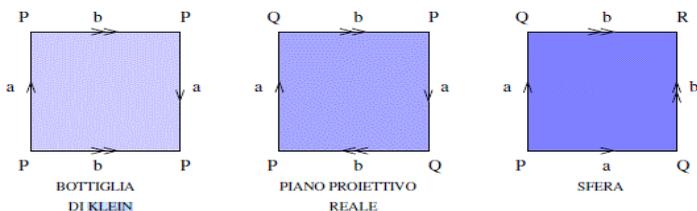
Ma, come continua William P. Thurston:

<< Vi sono buone ragioni per credere, comunque, che la struttura quadridimensionale dello spazio-tempo sia governata dalla struttura tridimensionale dello spazio solo. Pertanto, per studiare la struttura complessiva dell'universo senza pregiudizi, bisogna prima comprendere i tipi di strutture tridimensionali che possono dare origine all'universo osservato. Le strutture vengono chiamate varietà tridimensionali o, per abbreviare, trivarietà. >>

Noi ci occuperemo, come **Riemann** inventore del termine varietà, **solo di varietà matematiche, e per quanto riguarda la "forma" dell'universo, di varietà tridimensionali.**



bi-varietà (superfici) costruite in modo astratto; le frecce (o doppie frecce) oltre a specificare quali lati vengano incollati, indicano anche in che verso.



(per chi vuole approfondire dal punto di vista pratico la costruzione di una di una figura come il nastro di Möbius consiglio [questo articolo](#) di Maurizio)

Lo studio delle trivarietà è, in un certo senso, una generalizzazione dello studio delle varietà bidimensionali, cioè delle superfici. I topologi hanno scoperto come descrivere e classificare tutte le possibili bivarietà da oltre un secolo, ma la classificazione sistematica di tutte le trivarietà rimane un problema irrisolto, per le forme estremamente complesse a cui danno luogo talune trivarietà.

Le varietà topologiche.

Vogliamo approfondire un po' il concetto di varietà topologica.

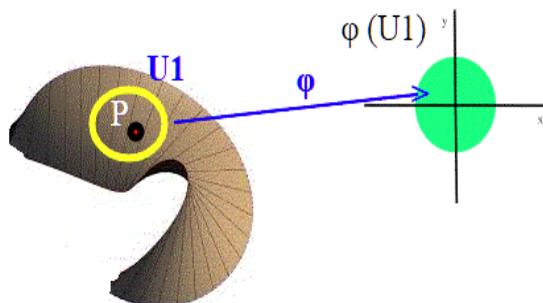
Le abbiamo già introdotte in questo articolo:

<http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2018/09/27/superfici-varietati-topologiche/>

Sempre nello stesso articolo abbiamo introdotto il concetto di spazio localmente euclideo, che serve proprio per la definizione di varietà.

Rimando sempre all'articolo citato sopra per una definizione più accurata.

Qui parleremo solo di una definizione semi-intuitiva tramite una figura e una piccola definizione:



Lo spazio S è localmente euclideo se per ogni punto P esiste un intorno che lo contiene ed è omeomorfo a un disco dello spazio euclideo.

Facciamo risaltare il discorso del localmente euclideo; la varietà del disegno **può non essere** omeomorfa a tutto il piano euclideo.

In caso contrario si parlerebbe di "**globalmente**", e non "**localmente**".

Tuttavia, per ogni punto della varietà, riusciamo a trovare un intorno sufficientemente piccolo, omeomorfo ad un disco del piano euclideo.

Questo significa "**localmente euclideo**".

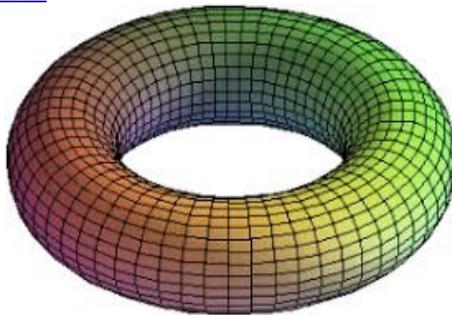
Le trivarietà altro non sono che varietà topologiche di dimensione **3**, mentre sappiamo che le superfici sono varietà topologiche di dimensione **2**.

Concettualmente, le trivarietà sono una estensione delle superfici bidimensionali.

Come detto in precedenza, i matematici scoprirono che è possibile rappresentare le superfici bidimensionali in modo astratto, usando dei poligoni.

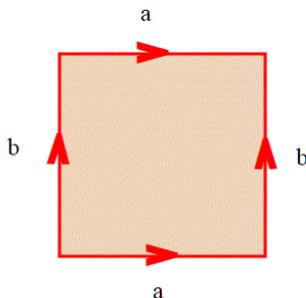
Noi lo abbiamo visto varie volte, ma concentriamo ora la nostra attenzione su come si costruisce un toro, che potete vedere in dettaglio [qui](http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2019/03/10/matematizziamo-nastro-mobius-parte-9-toro/):

<http://www.infinitoteatrodelcosmo.it/2019/03/10/matematizziamo-nastro-mobius-parte-9-toro/>



partiamo da una striscia quadrata, $X = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

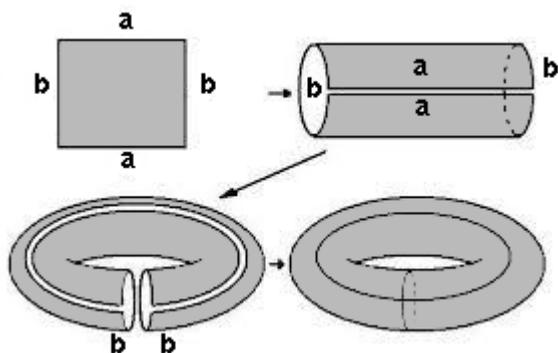
Lo schema della costruzione è questo:



Senza entrare nei dettagli tecnici (insiemi quoziente ed altro, che potete vedere nell'articolo citato) si tratta adesso di identificare i due lati mantenendo i versi delle frecce, cioè incollarli.

Dapprima incolliamo i due lati *a*, nello stesso verso, poi i due lati *b*, sempre nello stesso verso.

Con la prima operazione otteniamo un cilindro, con due bordi circolari; se piegandolo incolliamo i due bordi (pensate a un tubo di gomma), otteniamo proprio il nostro salvagente (**Toro**).



Il toro come possibile mondo bidimensionale

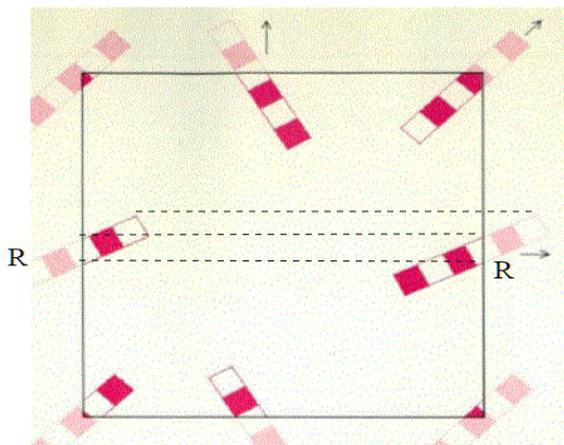
Facciamo una piccola parentesi, e pensiamo a questo toro costruito astrattamente come ad un possibile mondo bidimensionale che non sia, come nella nostra realtà, la superficie di una sfera.

Nel romanzo *Flatlandia*, di Edwin A. Abbott, si descrive una creatura bidimensionale che vive interamente nel piano.

Consideriamo i movimenti di una tale creatura su una bivarietà con la topologia di un toro, cioè un quadrato i cui lati opposti coincidano con un verso opportuno.

Vogliamo vedere come si muove tale creatura in un tale mondo (varietà topologica) bidimensionale.

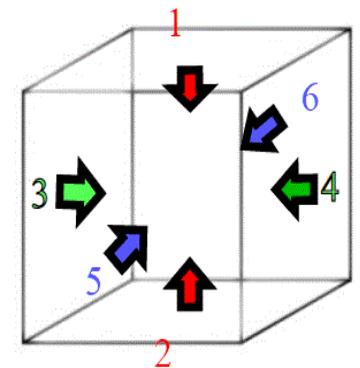
Per semplicità grafiche associamo la nostra creatura ad un righello, che chiameremo **R**.



Se R esce da destra, rientra da sinistra; se esce dall'alto rientra dal basso.
 Il salvagente e il quadrato con i lati identificati sono considerati dal punto di vista topologico come la stessa varietà, cioè il toro.

Il toro è una superficie localmente euclidea.

Proseguiamo con le nostre costruzioni astratte, ma questa volta nel tridimensionale.



Immaginiamo di avere un cubo nello spazio usuale tridimensionale; possiamo semplicemente pensare ad una stanza .

Per analogia per quanto visto sopra, incolliamo in senso astratto il pavimento (2) con il soffitto (1); la parete di fronte (5) con la parete posteriore (6); la parete sinistra (3) con la parete destra (4).

Se le incollature venissero fatte davvero, si dovrebbe immaginare la stanza che si piega e si salda con se stessa in una quarta dimensione.

Tutto ciò che è necessario per la descrizione della varietà, comunque, è dato dalla procedura delle incollature astratte.

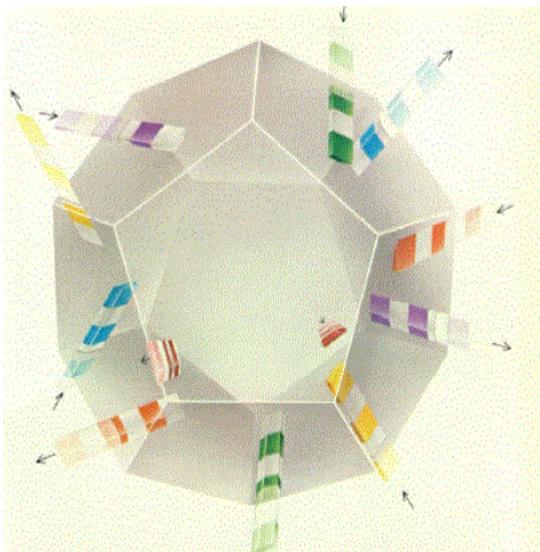
Se un oggetto all'interno della varietà si muove verso la parete di fronte, sparisce attraverso quella parete e riappare dalla parete dietro le spalle: analogamente, l'oggetto sparisce attraverso la parete di destra e riappare dalla parete di sinistra; sparisce nel soffitto e riappare dal pavimento.

Evidentemente questo moto è molto simile al moto di un oggetto interno al toro: la varietà è l'analogo tridimensionale del **bitoro** e perciò viene chiamata **tritoro**.

In questo modo, se momentaneamente mettiamo da parte il concetto di spazio reale fisico, in tal modo possiamo facilmente immaginare come si vivrebbe in un **tritoro**.

Per ultimo diamo un esempio intuitivo di una **tri-varietà astratta**, una delle più quotate per interpretare la forma dell'universo.

La tri-varietà di Herbert Seifert e C. Weber



Il dodecaedro da cui deriva la costruzione astratta della trivarietà di Herbert Seifert e C. Weber (immagine tratta da "Le Scienze")

Un modello possibile per la topologia dello spazio è la trivarietà scoperta nel 1932 da Herbert Seifert e C. Weber.

La possiamo rappresentare solo in modo astratto, non avendo a disposizione 4 o 5 dimensioni.

Consideriamo il dodecaedro in figura e identifichiamo ogni faccia con la sua opposta ruotata di tre decimi di un angolo giro.

In questo caso tutti i vertici sono identificati e formano un'unica classe di equivalenza; per quanto riguarda i lati, questi sono invece raggruppati in 6 classi distinte.

Quando parleremo della geometria delle varietà (**congettura di Thurston**), vedremo meglio perché lo spazio possa essere rappresentato da tale varietà. Ma ... un passo alla volta.

Nel prossimo articolo affineremo la struttura delle varietà topologiche, introducendo le varietà differenziabili.

n.d.r. Questo purtroppo non lo ha potuto sviluppare

I compatti dello spazio Euclideo

La definizione degli spazi compatti è stata introdotta un po' al volo. Per cui volevo approfondire il discorso, cercando di dare spiegazione a due fatti fondamentali che ci permetteranno di andare avanti con le nostre costruzioni topologiche in tutta tranquillità: la compattezza dell'intervallo chiuso in \mathbf{R} e del quadrato (o rettangolo) in \mathbf{R}^2 .

La definizione data di compattezza è topologica, è la più generalizzata, ed è stata introdotta così perché sia valida appunto anche negli spazi topologici. Tale definizione di spazio compatto è diversa negli spazi metrici, dove si usa la convergenza di successioni.

Ma negli spazi topologici, abbiamo a disposizione solo gli aperti, e dobbiamo usare quelli.

Riprendiamo ora la definizione di spazio compatto.

Ricoprimento aperto di uno spazio topologico

E' una famiglia di aperti $U = \{U_i\} i \in I$ tali che $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

Sottoricoprimento finito di U

è una parte della famiglia U, consistente in un numero finito di insiemi U_i , tali che la loro unione contenga ancora X:

$V = \{U_i\} i \in J$ tali che valga ancora $X \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, e l'insieme degli

indici J, oltre ad essere un insieme finito, sia sottoinsieme di I.

Definizione di spazio compatto

Uno spazio topologico X è compatto se e solo se da ogni ricoprimento aperto U è possibile estrarre un sottoricoprimento finito V .

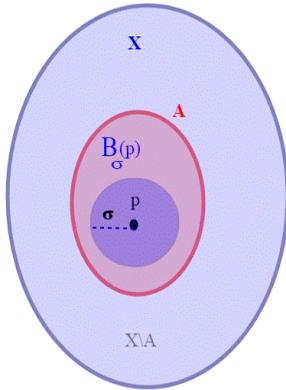
Di sicuro decidere se un insieme topologico è compatto o no, non è la cosa più semplice di questo mondo. Faremo un esempio di spazio compatto standoci su \mathbf{R} , che è uno spazio metrico.

Scopo principale di questo articolo è dimostrare che l'intervallo $[0,1]$ è compatto.

Ma cominciamo dall'inizio; siamo in \mathbf{R} che è uno spazio metrico e dobbia-

mo trattare con degli aperti. Riporto la definizione che avevo dato di aperti negli [spazi metrici](#) (argomento trattato nel testo di topologia):

Insiemi aperti negli spazi metrici.



Dato un insieme X con la sua metrica d , definiamo un sottoinsieme $A \subseteq X$ aperto, se comunque scegliamo un punto p appartenente ad A , $p \in A$, esiste una bolla con centro in p contenuta in A , ovvero più formalmente, esiste un $\sigma > 0$ tale che: $B_\sigma(p) \subseteq A$.

Nel caso di \mathbf{R} sappiamo che le bolle sono gli intervalli aperti centrati in p , $(p - \rho, p + \rho)$.

Ricordo poi che anche intervalli (a, b) sono insiemi aperti mentre quelli di tipo $[a, b]$ non sono aperti (infatti ogni bolla di centro b esce fuori dall'intervallo $[a, b]$ e quindi non vi può essere contenuta).

$b]$ e quindi non vi può essere contenuta).

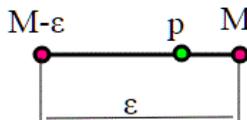
Un altro concetto che ci servirà, e che anzi sarà la chiave della dimostrazione è quello di estremo superiore in \mathbf{R} .

Avevamo parlato di \mathbf{R} e della continuità nella serie dedicata agli infiniti di Cantor. [Qui](#) trovate l'articolo, io riprendo solo quello che ci serve per la dimostrazione.

Per non appesantire troppo l'articolo, ho dato la possibilità di aprire o no dei dettagli.

Per chi non ha letto i dettagli sopra ricordiamo la proprietà fondamentale dell'estremo superiore:

Se M è l'estremo superiore di un insieme S , allora esistono elementi di S arbitrariamente vicini a $M = \sup S$.



Detto in modo più formale:

Qualsiasi sia il numero $\varepsilon > 0$, esiste sempre un elemento p di S tale che $M-p < \varepsilon$

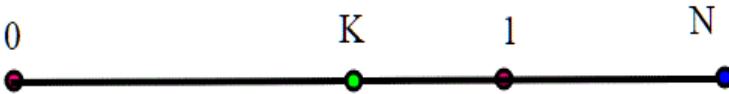
Veniamo adesso alla nostra dimostrazione:

L'intervallo $I = [0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea è uno spazio topologico compatto.

Sia $U = \{U_i\} i \in I$ un ricoprimento aperto di $[0,1]$, ovvero $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

Sia N un numero reale maggiore di 1 ($N > 1$).

Sia S l'insieme dei $k \in [0, N]$ tali che esiste un sottoricoprimento finito di U che copre l'intervallo $[0, k]$.



Tale insieme è non vuoto perché $0 \in S$.

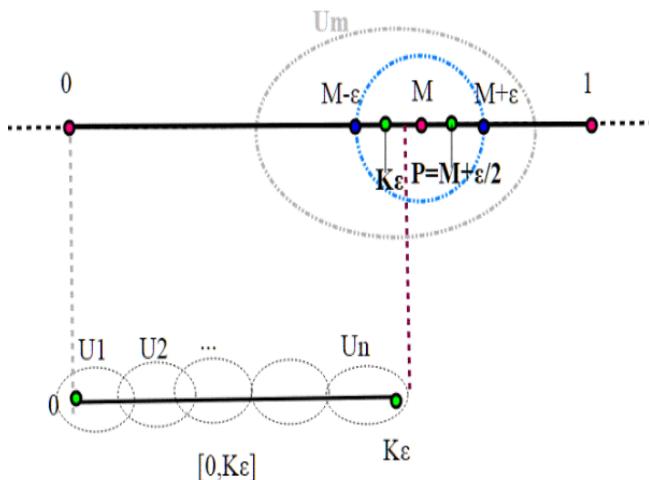
Infatti U ricopre tutto $[0,1]$, quindi esiste un U_0 che contiene lo zero, e quindi anche $[0,0]$. $\{U_0\}$ è un ricoprimento finito di $[0,0]$ che consiste solo nell'insieme U_0 stesso.

S è superiormente limitato; infatti gli elementi di S non possono essere maggiori di N , dovendo appartenere a $[0, N]$.

Quindi esiste l'estremo superiore.

Sia $M = \sup S$. M è maggiore di 1 .

Supponiamo per assurdo $M < 1$.



\mathbf{M} è un punto di $[0,1]$, quindi è contenuto in qualche aperto \mathbf{U}_m del ricoprimento.

Essendo \mathbf{U}_m *aperto*, esiste un intervallo aperto contenuto in \mathbf{U}_m e centro in \mathbf{M} , ovvero un intervallo aperto $(M-\epsilon, M+\epsilon)$ contenuto in \mathbf{U}_m .

E qui interviene il concetto di estremo superiore; essendo \mathbf{M} estremo superiore, esiste un K_ϵ che sta fra $m - \epsilon < K_\epsilon < M$;

Ma allora, appartenendo ad \mathbf{S} , esiste un sottoricoprimento finito di \mathbf{U} che contiene $[0, K_\epsilon]$

U_1, U_2, \dots, U_n , ovvero $[0, K_\epsilon] \subseteq U_1 \cup U_2 \dots \cup U_n$

Prendiamo adesso un punto \mathbf{P} interno a $(m, M + \epsilon)$, che potrebbe essere per esempio $P = M + \epsilon/2$, tanto per fissare le idee, (qualsiasi punto interno a $(m, M + \epsilon)$ andrebbe comunque bene).

Se adesso noi aggiungiamo a tali insiemi aperti anche *l'insieme* \mathbf{U}_m , avremmo che anche $[0, M+\epsilon/2]$ ammette un sottoricoprimento finito.

Infatti:

$$[0, M+\epsilon/2] = [0, K_\epsilon] \cup [t, M+\epsilon/2] \subset [0, K_\epsilon] \cup (M-\epsilon, M+\epsilon) \subset U_1 \cup U_2 \dots \cup U_n \cup U_m$$

Ma questo è assurdo, in quanto \mathbf{M} è estremo superiore di \mathbf{S} , mentre $M+\epsilon/2$ è maggiore di \mathbf{M} e appartiene ad \mathbf{S} .

Quindi $\mathbf{M} > 1$.

Ma se $\mathbf{M} > 1$, per la proprietà dell'estremo superiore, esiste K tale che $1 < K < M$ (basta prendere $\epsilon = M - 1$)

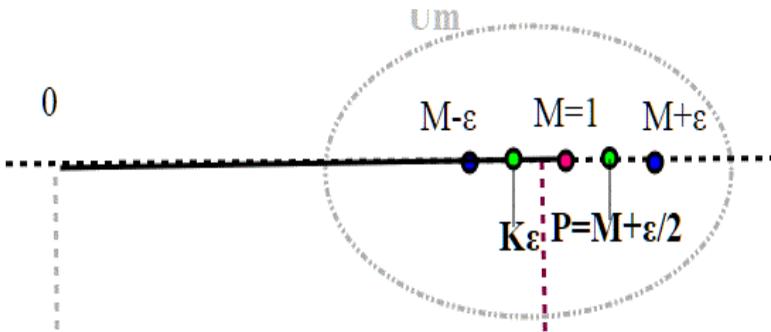


Quindi K appartiene ad S , ed esiste un sottoricoprimento finito di U che lo contiene.

Ma allora, essendo $[0, 1] \subset [0, K]$

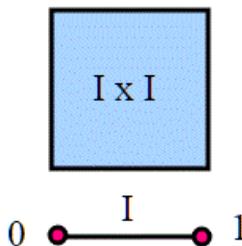
$[0, 1] \subset [0, K] \subset U_1 \cup U_2 \dots U_n$, esiste un ricoprimento finito per $[0, 1]$ che quindi è compatto.

Notare che il disegno è stato fatto nel caso $M < 1$; niente cambia se $M = 1$:



Notiamo che il fatto che $[0, 1]$ sia compatto dipende esclusivamente dalla continuità di R . In Q (razionali), questa dimostrazione non sarebbe valida, in quanto non vale l'assioma di completezza.

Tutti gli intervalli di R chiusi, del tipo $[a, b]$ sono compatti.



Infatti, come abbiamo visto nell'ultimo [articolo](#):

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, e sia X uno spazio compatto.

Allora $f(X)$ è uno spazio compatto.

Sappiamo che gli intervalli $[0,1]$ e $[a,b]$ sono omeomorfi, quindi esiste una applicazione continua di $[0,1] \rightarrow [a,b]$.

Citiamo ora un Teorema che non dimostreremo.

Siano X, Y degli spazi topologici. Allora L'insieme prodotto $X \times Y$ è uno spazio topologico compatto.

Ma allora veniamo al nostro quadrato $[0,1] \times [0,1]$, o più in generale al rettangolo $[a,b] \times [c,d]$.

In base al teorema citato, tali sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 sono compatti.

Il Teorema di Heine-Borel.

Per chi vuole andare più a fondo sui compatti di \mathbb{R}^n , esiste un risultato molto potente, Il Teorema di **Heine-Borel**.

Esso parla di insiemi chiusi (e questo sappiamo cosa vuol dire) e limitati (questo invece no).

Intuitivamente (e anche formalmente), un insieme Y è limitato se riusciamo a contenerlo con una bolla di un certo raggio N .

Ebbene, il teorema afferma che:

Un sottoinsieme Y di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se Y è chiuso e limitato.

La dimostrazione non è molto difficile, usando i risultati visti sopra.

Il fatto che $[0,1]$ sia compatto è infatti alla base della dimostrazione.

Ma per ora la omettiamo.

Notiamo che sia l'intervallo chiuso che il rettangolo sono insiemi chiusi e limitati.

Bene, adesso che sappiamo che gli intervalli chiusi e i rettangoli sono compatti, possiamo andare avanti con le costruzioni della topologia quoziente.

n.d.r. Vedasi il testo su Topologia.